

Relativistische Verallgemeinerung des Lenzschen Vektors (I)

Eberhard Kern

Vereinigung der Technischen Überwachungs-Vereine, Essen

Z. Naturforsch. **39a**, 720–732 (1984); eingegangen 17. April 1984

Relativistic generalisation of the Lenz vector (I)

The non-relativistic motion of a particle in a central field with $1/r$ potential, e.g. the motion of an electron in the Coulomb field of a charged nucleus at rest, is described by the equation of motion (non-relativistic Kepler problem) $m \mathbf{x}'' = \alpha \cdot \mathbf{x}/r^3$, with $\alpha = e^z e$ (product of the charges of the central body e^z and the electron e). From this equation of motion, three statements of conservation can be derived: in respect of the energy E , of the angular momentum \mathbf{L} and of the Lenz vector $\mathbf{A} = m \{ \mathbf{x}' \times \mathbf{L} + \alpha \cdot \mathbf{x}/r \}$. The geometric meaning of \mathbf{A} is that of a vector pointing in the direction of the perihelion of the particle orbits (conic sections).

It will be demonstrated that also at the relativistic Kepler problem, which is based on the equation of motion $m (\mathbf{x}'/\sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2})' = \alpha \cdot \mathbf{x}/r^3$ an analogous Lenz vector exists. It represents a quantity of conservation – in the same way as the relativistic energy and the relativistic angular momentum. For the transitional case $\rightarrow \infty$, where the relativistic problem turns into the non-relativistic problem, the relativistic Lenz vector also turns into the non-relativistic Lenz vector.

The generalised (relativistic) Lenz vector has also a geometric meaning. Its direction coincides with the oriented axis of symmetry of the orbits (rosettes, spirals, hyperbola-type curves etc.).

The quantity of conservation \mathbf{A} occupies a special position in respect of the quantities of conservation energy and angular momentum. Whereas the energy and the angular momentum correspond with a symmetry of time and space, the Lenz quantity of conservation corresponds with a symmetry of the orbits. The fact that the Lenz vector can relativistically be generalised touches thereby on principal aspects.

1. Einleitung

Wir gehen aus von der Bewegungsgleichung des nichtrelativistischen Kepler-Problems

$$m \mathbf{x}'' = \alpha \cdot \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \quad (1.1)$$

und denken dabei an die Bewegung eines Elektrons (Masse m , Ladung e) im Coulomb-Feld eines ruhenden Kerns (Ladung des Zentralkörpers e^z). Die Konstante $\alpha = e^z e$ ist das Produkt der Ladungen, und es gilt

$$\alpha \lessgtr 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \text{Anziehung} \\ \text{freies Teilchen} \\ \text{Abstoßung.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Ferner gilt: $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3)$: Ortsvektor des Elektrons; $\mathbf{x}'' = (0, 0, 0)$: Ortsvektor des Kerns; Zeitableitung der Teilchenbahn $\mathbf{x}(t)$: $\mathbf{x}' = d\mathbf{x}/dt$ usw.; Abstand des Elektrons vom Kern

$$r = \sqrt{\mathbf{x}^2}, \quad \text{Folge} \quad r r' = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'). \quad (1.3)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. E. Kern, Schubertstr. 6, 4300 Essen 1.

Aus der Bewegungsgleichung (1.1) folgen drei Erhaltungsgrößen: die Energie E , der Drehimpuls \mathbf{L} und der Lenzsche Vektor \mathbf{A}

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} m \mathbf{x}'^2 + \alpha/r, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = m \mathbf{x} \times \mathbf{x}', \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = m \cdot \left\{ \mathbf{x}' \times \mathbf{L} + \alpha \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right\}. \quad (1.6)$$

Die Bahnkurven $\mathbf{x}(t)$, d.h. die Lösungen der Dgl. (1.1), sind Kegelschnitte. Die Bahnebene, in der auch der Lenzsche Vektor liegt, steht senkrecht auf \mathbf{L} . Die Richtung des Vektors \mathbf{A} zeigt zum Perihel der Kegelschnitte, worin seine anschauliche Bedeutung liegt.

Die Erhaltungsgröße \mathbf{A} nimmt eine Sonderstellung gegenüber den beiden anderen Erhaltungsgrößen E und \mathbf{L} ein. Sie stellt ein spezifisches Bewegungsintegral im Coulomb-Feld dar, was mit der Entartung der Bewegung im $1/r$ -Potential zusammenhängt (Periodizitätseigenschaften der Lösungen, die z. B. bei der Ellipse zu einer geschlossenen Bahn führen), siehe z. B. Landau u. Lifschitz [1]. Weiterhin läßt sich der Lenzsche Vektor – im Gegensatz

0340-4811 / 84 / 0800-0720 \$ 01.30/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

zu den Erhaltungsgrößen E und \mathbf{L} – nicht aus den zu (1.1) gehörigen Lagrange-Gleichungen aufgrund des Noetherschen Theorems (in der engeren Fassung des Theorems) ableiten, siehe z. B. Mittelstaedt [2]. Das hängt damit zusammen, daß der Erhaltungsgröße \mathbf{A} keine raum-zeitliche Symmetrie entspricht.

Auf die gruppentheoretischen und quantenmechanischen Besonderheiten des Lenzschen Vektors (1.6) gehen wir nicht näher ein (zufällige Entartung der Eigenwerte, dynamische Symmetrie), vgl. dazu etwa Petraschen und Trifonow [3], Mitter [4], Greiner [5].

Die Sonderstellung des Lenzschen Vektors legt die Auffassung nahe, daß dieser Erhaltungsvektor charakteristisch ist für die Bewegung im $1/r$ -Potential und auf andere Zentralbewegungen nicht verallgemeinert werden kann. Diese Auffassung ist nicht richtig, siehe Fradkin [6]. Wir werden zeigen, daß auch für das relativistische Kepler-Problem, d. h. für die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \left(\frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2}} \right)' = \alpha \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \quad (1.7)$$

oder umgeformt

$$m \mathbf{x}'' = \sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2} \alpha \frac{1}{r^3} \cdot \left\{ \mathbf{x} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{x} \mathbf{x}') \mathbf{x}' \right\}, \quad (1.8)$$

ein Erhaltungsvektor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ existiert, der in enger Analogie zum Lenzschen Vektor (1.6) steht, siehe Tab. 1. Dieser relativistische Vektor \mathbf{A} geht beim Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ (c Lichtgeschwindigkeit) in den nichtrelativistischen Vektor (1.6) über und stellt somit die relativistische Verallgemeinerung des Lenzschen Vektors dar.

Genau wie beim nichtrelativistischen Kepler-Problem (1.1) folgen demnach aus (1.7) oder (1.8) des relativistischen Kepler-Problems drei Erhaltungsgrößen. Zu der relativistischen Energie \mathcal{E} und dem relativistischen Drehimpuls \mathbf{L}

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = m c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2}} + \alpha/r, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = m \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}'}{\sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2}} \quad (1.10)$$

tritt als dritte Erhaltungsgröße der relativistische Lenzsche Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ hinzu. Seine Richtung fällt mit der (orientierten) Symmetrieachse der relativistischen Bahnkurven $\mathbf{x}(t)$ zusammen.

Demnach haben wir folgende Situation: Den Erhaltungsgrößen Energie und Drehimpuls entspricht eine Symmetrie der Zeit (Homogenität) und des Raumes (Isotropie). Demgegenüber entspricht der Lenzschen Erhaltungsgröße eine Symmetrie der Bahnkurven (Spiegelsymmetrie bezüglich einer Achse).

Man kann eine engere Analogie zwischen der nichtrelativistischen Bewegungsgleichung (1.1) und der relativistischen Bewegungsgleichung (1.7) bzw. (1.8) herstellen, indem man vom Parameter t (Zeit) zum Parameter τ (Eigenzeit) übergeht. Der Zusammenhang zwischen t und τ wird durch die Gleichung

$$d\tau = \sqrt{1 - (\mathbf{x}'/c)^2} dt \quad (1.11)$$

vermittelt. Damit bekommen die Erhaltungsgrößen (1.9) und (1.10) die Form

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m c^2 \sqrt{1 + (\dot{\mathbf{x}}/c)^2} + \alpha/r, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \quad (1.13)$$

und (1.7), (1.8) gehen über in die relativistische Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m c^2} \left\{ \mathcal{E} \alpha \frac{1}{r^3} - \alpha^2 \frac{1}{r^4} \right\} \mathbf{x} \quad (1.14)$$

mit $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/d\tau$ usw. Man kann also das durch (1.14) charakterisierte relativistische Kepler-Problem auffassen als verallgemeinertes Zentralkraftproblem. Während beim nichtrelativistischen Problem (1.1) die Zentralkraft den Betrag $|\alpha| \cdot 1/r^2$ hat, tritt beim relativistischen Problem noch ein $1/r^3$ -Term hinzu. Im folgenden werden wir allerdings von der Eigenzeitformulierung keinen Gebrauch machen.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist einerseits die nichtrelativistische Bewegungsgleichung (1.1) und andererseits die relativistische Bewegungsgleichung (1.8) mit den zugehörigen Lösungen (Bahnkurven) $\mathbf{x}(t)$.

Wir benötigen insbesondere eine detaillierte Kenntnis der relativistischen Bahnkurven (Rosetten, Spiralen, hyperbelähnliche Kurven usw.). Soweit ersichtlich, findet man hierüber in der Literatur nur spärliche, für unsere Zwecke nicht ausreichende Angaben. Aus diesem Grunde wird in Teil II das vollständige Lösungssystem der relativistischen Bewegungsgleichung zusammengestellt und diskutiert. Dort wird auch eine Reihe von Beziehungen hergeleitet, die bisher anscheinend noch nicht veröffentlicht wurden.

Im folgenden werden die Abschn. 1 bis 12 aus Teil II mit II.1 ... II.12 und die Tab. 1 bis 4 aus Teil II mit Tab. II.1 ... Tab. II.4 zitiert.

2. Der nichtrelativistische Lenzsche Vektor

Wir diskutieren zunächst den nichtrelativistischen Lenzschen Vektor A , (1.6), im Hinblick auf das Ziel, diesen relativistisch zu verallgemeinern. Das geschieht in drei Schritten.

Erster Schritt. Für den Betrag von A

$$A = \sqrt{A^2} \quad (2.1)$$

erhält man unter Verwendung von (1.4), (1.5) einen Zusammenhang zwischen A und L , E

$$A = \sqrt{x^2 m^2 + L^2 m \cdot 2E}. \quad (2.2)$$

L ist der Betrag des Drehimpulses L :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{L^2} = m \sqrt{x^2 x'^2 - (x \cdot x')^2} \\ &= m r \sqrt{x'^2 - r'^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aus (2.2) ist ersichtlich, daß der zulässige Wertebereich von L , E derart eingeschränkt werden muß, daß der Wurzelradikand positiv oder Null bleibt. Das ist aber bereits durch die Bewegungsgleichung (1.1) garantiert. Näheres hierzu im Abschnitt II.1.

Es gibt zwei Fälle, in denen $A = 0$ wird. Erstens für $E = -(m/2)(\alpha/L)^2$ (Kreisbahn), zweitens für $\alpha = L = 0$ (freies Teilchen auf einer Zentralbahn oder in Ruhe). In diesen Fällen wird $A \equiv 0$, und der Lenzsche Vektor verliert seine Bedeutung als Vektor mit zeitlich konstanter Richtung.

Der konstante Betrag von A ist proportional zur Exzentrizität $\sqrt{1 + L^2 2E/\alpha^2 m}$ der Kegelschnittlösungen $x(t)$, was ihm eine gewisse Anschaulichkeit verleiht. Jedoch ist zu beachten, daß der Betrag des Lenzschen Vektors – neben den Erhaltungsgrößen L und E – keine neue Erhaltungsgröße darstellt. Daher ist es sinnvoll, neben dem Vektor A den Lenzschen Einheitsvektor

$$\lambda = A/A \quad (2.4)$$

einzuführen.

Zweiter Schritt. Wir formen A , (1.6), um, indem wir von den Beziehungen (1.3), (1.5) und (2.3) Gebrauch machen:

$$A = \left\{ L^2 \frac{1}{r^2} + \alpha m \cdot \frac{1}{r} \right\} x - \frac{r'}{r} m L \times x. \quad (2.5)$$

Den Vektor L ersetzen wir durch den Einheitsvektor des Drehimpulses

$$l = L/L = \frac{x \times x'}{\sqrt{(x \times x')^2}} \quad (2.6)$$

und gehen zum Lenzschen Einheitsvektor λ über:

$$\lambda = \frac{L^2 \frac{1}{r} + \alpha m}{A} \cdot \frac{x}{r} - \frac{r' m L}{A} \cdot l \times \frac{x}{r}. \quad (2.7)$$

Die Gl. (2.7) gilt unter den Voraussetzungen

$$L \neq 0 \quad \text{und} \quad A \neq 0. \quad (2.8)$$

Der Vektor λ ist vom Typ

$$\lambda = p \cdot \frac{x}{r} - q \cdot l \times \frac{x}{r}. \quad (2.9)$$

Die Einheitsvektoren x/r und $l \times x/r$ stehen aufeinander senkrecht. Wegen $\lambda^2 = 1$ folgt

$$p^2 + q^2 = 1. \quad (2.10)$$

Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen Winkel θ einführen und (2.9) bzw. (2.7) auf die Form bringen

$$\lambda = \cos \theta \cdot \frac{x}{r} - \sin \theta \cdot l \times \frac{x}{r} \quad (2.11)$$

$$\text{mit} \quad \cos \theta = \frac{1}{A} \left\{ L^2 \frac{1}{r} + \alpha m \right\}, \quad (2.12)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{A} L m r'. \quad (2.13)$$

Ein Vergleich von (2.12) mit der für $L \neq 0$ gültigen normierten Bahngleichung

$$L^2 1/r = -\alpha m + A \cos \theta, \quad (2.14)$$

die in Tab. II.2 hergeleitet wird, zeigt, daß beide Gleichungen identisch sind. Demnach können wir den hier formal eingeführten Winkel θ mit dem dort eingeführten normierten Polarwinkel θ identifizieren.

Es muß noch geprüft werden, ob das Vorzeichen von $\sin \theta$ konsistent ist mit dem Ausdruck für $\cos \theta$, d.h. mit (2.12) und (2.14). Denn wir hätten ja in (2.11) den Faktor $\sin \theta$ auch durch $-\sin \theta$ ersetzen können, was einer Ersetzung von θ durch $-\theta$ entspricht.

Zur Nachprüfung differenzieren wir (2.14) nach der Zeit

$$-L^2 r'/r = -A \sin \theta \cdot \theta' \quad (2.15)$$

und berücksichtigen, daß

$$\theta' = \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \quad (2.16)$$

ist. Die Beziehung (2.16) ist eine Folge aus der Definition des Drehimpulses \mathbf{L} in Polarkoordinaten r, θ der Bahnebene und aus der Normierung von θ' : $\theta' > 0$, vgl. Tabelle II.2. Aus (2.15), (2.16) ergibt sich die Darstellung (2.13) für $\sin \theta$, womit die Konsistenz nachgewiesen ist. Das bedeutet, der mit (2.12) und (2.13) eingeführte Winkel θ ist identisch mit dem normierten Polarwinkel θ .

Mit (2.11) haben wir die Darstellung des Lenzschen Einheitsvektors λ auf eine Form gebracht, die man, wie wir sehen werden, unverändert auf den relativistischen Fall übertragen kann. In der Form (2.11) läßt sich die Erhaltungsgröße λ auch auf allgemeine Zentralpotentialle verallgemeinern, siehe [6].

Dritter Schritt. Die Darstellung (2.11) der Erhaltungsgröße $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ enthält als einzige individuelle Größe den normierten Polarwinkel $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Es ist diese Funktion $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, die sich unmittelbar relativistisch verallgemeinern läßt. Man hätte mit dieser Verallgemeinerung bereits eine relativistische Erhaltungsgröße $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ gewonnen, nämlich den relativistischen Lenzschen Einheitsvektor. Der Vektor λ ist aber nicht für alle Lösungen $\mathbf{x}(t)$ der Bewegungsgleichung definiert, sondern nur für die Lösungen, die die einschränkenden Bedingungen $L \neq 0$, $A \neq 0$, Gl. (2.8), erfüllen. Diese Einschränkung läßt sich aber leicht beseitigen.

Zu dem Zweck definieren wir den Lenzschen Vektor $\mathbf{A} = A \cdot \lambda$ folgendermaßen:

$$\mathbf{A} = A \cdot \left\{ \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} - \sin \theta \cdot \mathbf{I} \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right\}. \quad (2.17)$$

Man macht sich leicht klar, wenn man (2.13) bis (2.5) zurückverfolgt, daß dieser Vektor \mathbf{A} auch für $L = 0$ und $A = 0$ wohldefiniert ist. Mit anderen Worten, dieser Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ist eine generelle Erhaltungsgröße für die vorgegebene nichtrelativistische Bewegungsgleichung (1.1).

3. Der relativistische Lenzsche Vektor

Wir definieren den relativistischen Lenzschen Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ durch (2.17). $\mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ bedeutet jetzt den relativistischen Einheitsvektor des Drehimpulses, der unverändert durch Gl. (2.6) gegeben ist. Die relativistische Konstante A und den relativistischen

Winkel $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ übernehmen wir aus dem Formelsystem, das in Teil II (Tab. II.1 und Tab. II.2) hergeleitet wird. Zwischen dem so definierten relativistischen Lenzschen Vektor und dem in Abschnitt 2 diskutierten nichtrelativistischen Lenzschen Vektor besteht eine enge Analogie, siehe Tabelle 1. Im folgenden werden wir beide Fälle (das nichtrelativistische und das relativistische Problem) stets gemeinsam behandeln.

Aus den Umformungen im Abschnitt 2 geht hervor, daß der in Tab. 1 definierte nichtrelativistische Lenzsche Vektor \mathbf{A} identisch ist mit dem Vektor

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = m \cdot \left\{ \mathbf{x}' \times \mathbf{L} + \alpha \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right\} \quad (3.1)$$

in (1.6). Für den relativistischen Vektor gibt es jedoch keine zu (3.1) analoge Darstellung von \mathbf{A} als algebraische Funktion von \mathbf{x}, \mathbf{x}' . Das erkennt man aus Tab. 1, indem man aus der Funktion $\theta = \sigma f(r)$ die Funktionen $\cos \theta$ und $\sin \theta$ bildet und diese in die Definitionsgl. (T 1.1) von \mathbf{A} einsetzt.

Zur Definition des Winkels θ als Funktion von \mathbf{x}, \mathbf{x}' sind fünf Bemerkungen zu machen.

Erstens: Den in Tab. II.1 definierten Vorzeichenfaktor $\sigma(r')$ kann man als Funktion von \mathbf{x}, \mathbf{x}' ausdrücken, indem man von der Gl. (1.3) Gebrauch macht. Man erhält die in Tab. 1 angegebene Darstellung von $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Zweitens: Im Abschnitt II.2 wird der Winkel θ als normierter Polarwinkel eingeführt, nämlich als Bestandteil der Polarkoordinaten r, θ in einer normierten Bahnebene K^N . Der Lenzsche Vektor \mathbf{A} , (T 1.1), ist aber in einem beliebigen Koordinatensystem K definiert, so daß eine neue Interpretation des Winkels θ („Lenzscher Winkel“), die wir in Abschnitt 8 geben werden, erforderlich ist.

Drittens: Die Normierung des Winkels θ bezieht sich auf drei Größen: auf die Integrationskonstante φ (Abschnitt II.2), auf den Periodizitätsparameter n (Abschnitt II.3) und auf das Vorzeichen der Zeitableitung θ' (Abschnitt II.2).

Viertens: Abweichend von Tab. II.2 ist in (T 1.6), (T 1.7) der Tab. 1 die Konstante π (für $\alpha < 0$) eingeführt. Dies wird in Abschnitt II.12 als Umnormierung des Polarwinkels gedeutet.

Fünftens: Um übersichtliche Verhältnisse zu bekommen, wurden in Tab. II.2 für die Definition des Winkels θ die Fälle $A=0$ und $L=0$ ausgeschlossen.

Tab. 1. Definition des Lenzschen Vektors A .

Lenzscher Vektor A	$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = A \cdot \left\{ \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} - \sin \theta \cdot \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right\}$ mit $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ (T1.1)	
Einheitsvektor des Drehimpulses $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$	$\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{x}'}{\sqrt{(\mathbf{x} \times \mathbf{x}')^2}}$ (T1.2)	
Vorzeichenfaktor $\sigma = \pm 1$	$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{sign} \{(\mathbf{x} \times \mathbf{x}')\} = (\mathbf{x} \times \mathbf{x}') / \sqrt{(\mathbf{x} \times \mathbf{x}')^2}$ (T1.3)	
Fallunterscheidung	nichtrelativistisches Problem	relativistisches Problem
Betrag $A = \sqrt{A^2}$	$A = \sqrt{\alpha^2 m^2 + L^2 m \cdot 2E}$	$A = \sqrt{\alpha^2 m^2 + L^2 (mc)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 - 1 \right\}}$ (T1.4)
Lenzscher Winkel $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	für $0 \leq L < \infty$ und $\alpha \leq 0$	Fall A $ \alpha /c < L < \infty$ für $\alpha \neq 0$ $0 \leq L < \infty$ für $\alpha = 0$
	$\theta = \sigma \cdot \arccos \frac{L^2 \frac{1}{r} + \alpha m}{A}$	$\theta = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha/Lc)^2}} \cdot \arccos \frac{\left\{ L^2 - \left(\frac{\alpha}{c} \right)^2 \right\} \frac{1}{r} + \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{mc^2}}{A}$ (T1.5)
	für $\begin{cases} \text{Anziehung } (\alpha < 0) \\ \text{Abstoßung } (\alpha > 0) \end{cases}$	Fall B $L = \alpha /c$ für $\alpha \neq 0$ $\theta = \sigma \cdot \left\{ -\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2} - \frac{2\alpha}{\mathcal{E}} \frac{1}{r} + \pi \right\}$ $\theta = \sigma \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2} - \frac{2\alpha}{\mathcal{E}} \frac{1}{r}$ (T1.6)
	für $\begin{cases} \text{Anziehung } (\alpha < 0) \\ \text{Abstoßung } (\alpha > 0) \end{cases}$	Fall C $0 \leq L < \alpha /c$ für $\alpha \neq 0$ $\theta = \sigma \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(\alpha/Lc)^2 - 1}} \cdot \text{Arch} \frac{\left\{ \left(\frac{\alpha}{c} \right)^2 - L^2 \right\} \frac{1}{r} - \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{mc^2}}{A} + \pi \right\}$ $\theta = \sigma \cdot \frac{1}{(\alpha/Lc)^2 - 1} \cdot \text{Arch} \left(-\frac{\left\{ \left(\frac{\alpha}{c} \right)^2 - L^2 \right\} \frac{1}{r} - \alpha m \cdot \frac{\mathcal{E}}{mc^2}}{A} \right)$ (T1.7)

Beide Beschränkungen heben wir jetzt auf (siehe Tab. 1), damit der Lenzsche Vektor $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ für den ganzen L -Bereich $0 \leq L < \infty$ und für alle zulässigen Parameter α, L, E bzw. α, L, \mathcal{E} gültig, d. h. generell gültig ist.

Die in Tab. 1 definierte Funktion $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ist – abgesehen von dem Fall (1) „Kreisbahn“ (siehe unten) – eindeutig für $L \geq 0$ bestimmt. Dabei ist zu beachten, daß für die Funktionen $\arccos \mu$ und $\text{Arch} \mu$ jeweils die Hauptwerte zu nehmen sind. Für $L = 0$ folgen die Funktionswerte von $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ aus der für $L > 0$ geltenden Funktion $\theta = \sigma f(r, \alpha, L)$ durch Grenzübergang $L \rightarrow 0$ bei vorgegebenen Wechselwirkungskonstanten $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$. Einzelheiten dazu in Abschnitt II.11.

Wir diskutieren jetzt die Fälle $A = 0$ und $L = 0$ und zeigen, daß der in Tab. 1 definierte Vektor A auch dann eindeutig bestimmt ist, wenn der Winkel θ und der Einheitsvektor \mathbf{l} unbestimmt werden. Dazu machen wir die Fallunterscheidungen:

- Fall (1): $A = 0$, $L \neq 0$, $\alpha \neq 0$
- Fall (2): $A = 0$, $L = 0$, $\alpha = 0$
- Fall (3): $A \neq 0$, $L = 0$, $\alpha \neq 0$.

Es gibt zwei Fälle, in denen die Konstante A (Tab. 1) gleich Null wird: Fall (1) „Kreisbahn“ (Sonderfall im Bereich $L \neq 0$, $\alpha < 0$) und Fall (2) „freies Teilchen auf einer Zentralbahn oder in Ruhe“. Der Fall (3) gilt für ein wechselwirkendes Teilchen auf einer Zentralbahn (mit $A = |\alpha| m$).

Beim Fall (1) wird θ unbestimmt. In die Definition des Lenzschen Vektors A geht der Winkel θ jedoch nur in der Form $\cos \theta$ und $\sin \theta$ ein. Beide Funktionen bleiben – auch bei Unbestimmtheit des Winkels θ – beschränkt. Bei den Fällen (2) und (3) wird der Einheitsvektor I unbestimmt. Die Unbestimmtheit bezieht sich auf die Richtung von I , nicht aber auf den Betrag, der endlich (nämlich = 1) bleibt.

Nach diesen Vorbemerkungen läßt sich der Vektor A für die Fälle (1), (2), (3) explizit berechnen.

Fall (1) und (2): Es folgt in beiden Fällen unmittelbar $A = 0$.

Fall (3): Die Grenzwerte des Winkels θ für $L \rightarrow 0$, $\alpha \neq 0$ folgen aus der nichtrelativistischen Gl. (T 1.5) und aus (T 1.7) des relativistischen Falles C. Beide Grenzwerte (für das nichtrelativistische und das relativistische Problem) stimmen überein:

$$\theta(L=0) = \begin{cases} \sigma \cdot \pi & \text{für } \begin{cases} \alpha < 0, \\ \alpha > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.2)$$

Die Funktion $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ist für $L=0$ eine Konstante (genauer gesagt, sie ist wegen des Vorzeichenfaktors $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \pm 1$ abschnittsweise konstant). Das folgt aus der für $L=0$ gültigen Beziehung $\theta' = 0$, siehe die spätere Gleichung (5.6).

Aus (3.2) erhält man gemäß (T 1.1), (T 1.4) für den Vektor A den Ausdruck

$$A = \alpha m \mathbf{x}/r \quad \text{für } \alpha \leq 0. \quad (3.3)$$

Der Vektor (3.3) stimmt – wie es sein muß – mit dem nichtrelativistischen Vektor A gemäß (3.1) überein, wenn man dort $L=0$ setzt. Geht man zum Lenzschen Einheitsvektor über, so folgt

$$\lambda = \mp \mathbf{x}/r \quad \text{für } \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Damit ist gezeigt, daß auch für die Fälle (1), (2), (3), der in Tab. 1 definierte Vektor A eindeutig bestimmt ist. Bemerkenswert ist, daß der nichtrelativistische und der relativistische Vektor A für $L=0$ übereinstimmen, obwohl das für $L>0$ keineswegs der Fall ist.

4. Der relativistische Lenzsche Vektor als Verallgemeinerung des nichtrelativistischen Lenzschen Vektors

In den Abschn. II.10 und II.12 wird gezeigt, daß die in Tab. 1 definierte relativistische Funktion

$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ stetig in die nichtrelativistische Funktion $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ übergeht, wenn man die Konstante c nach Unendlich gehen läßt. Das gilt für alle aufgrund der Bewegungsgleichung (1.1) bzw. (1.8) zugelassenen Parameter α, L, E bzw. α, L, \mathcal{E} . Vor dem Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ hat man die relativistische Energie \mathcal{E} durch die relativistische Energie $E = \mathcal{E} - mc^2$ zu ersetzen.

Aus (T 1.1) folgt, daß demnach auch der relativistische Vektor A für $c \rightarrow \infty$ stetig in den nichtrelativistischen Vektor A übergeht. Wenn man noch berücksichtigt, daß der Vektor $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ eine Erhaltungsgröße ist (siehe Abschn. 5), kann man feststellen: Der in Tab. 1 definierte relativistische Vektor $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ist die kompensierte Verallgemeinerung des durch die Gl. (3.1) vorgegebenen nichtrelativistischen Lenzschen Vektors $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Die Verallgemeinerung ist, wie aus der Herleitung hervorgeht, eindeutig.

Wir machen noch eine Bemerkung zu dem additiven Zusatzterm $\sigma \cdot \pi = \pm \pi$, der in (T 1.6), (T 1.7) bei den Fällen B und C für $\alpha < 0$ auftritt. Der Zusatzterm ist allein deshalb erforderlich, damit auch für $L=0$, $\alpha < 0$ (Anziehung) der relativistische Vektor A beim Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ in den vorgegebenen nichtrelativistischen Vektor $A = -|\alpha| m \cdot \mathbf{x}/r$, (3.3), übergeht. Ohne den Zusatzterm würden (3.2), (3.3), (3.4) für das relativistische Problem lauten:

$$\theta(L=0) = 0, \quad \text{für } \alpha \leq 0, \quad (4.1)$$

$$A = |\alpha| m \frac{\mathbf{x}}{r} \quad \text{für } \alpha \leq 0, \quad (4.2)$$

$$\lambda = \mathbf{x}/r \quad \text{für } \alpha \leq 0. \quad (4.3)$$

Wie man sieht, bewirkt der Zusatzterm weiter nichts, als daß der relativistische Vektor A bzw. λ für $\alpha < 0$ sein Vorzeichen wechselt.

Ergänzend sei angemerkt, daß im vorliegenden Fall ($L=0$, $\alpha \leq 0$) die relativistischen Größen $\theta(L=0)$, A und λ unabhängig von c sind, so daß sich ihre Werte beim Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ nicht ändern. Weiterhin ist anzumerken, daß der Zusatzterm $\sigma \cdot \pi = \pm \pi$ nicht nur beim Fall C, sondern auch beim Fall B eingeführt wurde, obwohl der Fall B keinen Einfluß auf den Grenzwert $\theta(L=0)$ bei $\alpha \leq 0$ hat. Damit wird erreicht, daß der stetige Zusammenhang der Fälle B und C nicht verloren geht. Einzelheiten über den Zusammenhang der relativistischen Fälle A, B, C findet man in Abschnitt II.7.

5. Der Lenzsche Vektor als Erhaltungsgröße

Wir berechnen die Zeitableitung von $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ und zeigen, daß diese unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung (1.1) bzw. (1.8) verschwindet, daß also der in Tab. 1 definierte Lenzsche Vektor A eine Erhaltungsgröße ist.

Zunächst die in Abschnitt 3 diskutierten Fälle (1), (2), (3). Für (1) und (2) folgt aus $A = 0$ unmittelbar $A' = 0$. Für den Fall (3) mit $L = 0$, $\alpha \neq 0$ erhält man aus (3.3) $A' = \alpha m (\mathbf{x}/r)'$. Wegen $L = 0$ gilt aber $\mathbf{x}/r = \text{const.}$ Also folgt, wie behauptet, $A' = 0$. Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall der Erhaltungssatz $A = \text{const.}$ dasselbe aussagt wie der Erhaltungssatz $L = \text{const.}$, nämlich $\mathbf{x}/r = \text{const.}$ Mit anderen Worten: in diesem Falle ist der Lenzsche Vektor A keine zusätzliche Erhaltungsgröße, die neben dem Drehimpuls L (und der Energie E bzw. \mathcal{E}) als unabhängige Erhaltungsgröße auftritt. Darin kommt die Sonderstellung des Drehimpulswertes $L = 0$ zum Ausdruck.

Für das Folgende setzen wir $A \neq 0$, $L \neq 0$ voraus. Um die Zeitableitung von A , (T 1.1), zu berechnen, leiten wir einige Hilfsformeln ab. Aus

$$I = \frac{m}{L} \mathbf{x} \times \mathbf{x}' \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{m}{L} \cdot \mathbf{x} \times \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.1)$$

gültig für das nichtrelativistische bzw. für das relativistische Problem, folgt

$$I \times \frac{\mathbf{x}}{r} = \frac{m}{L} r^2 \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)' \quad \text{bzw.} \\ I \times \frac{\mathbf{x}}{r} = \frac{m}{L} r^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)'. \quad (5.2)$$

Dabei haben wir die Beziehung $(\mathbf{x}/r)' = \mathbf{x}'/r - r' \cdot \mathbf{x}/r^2$ benutzt und $\beta^2 = (\mathbf{x}'/r)^2$ gesetzt. Aus (5.2) folgt weiter (unter Berücksichtigung von $I' = 0$):

$$\left(I \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right)' = -\frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \quad \text{bzw.} \\ \left(I \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right)' = -\frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (5.3)$$

Unter Verwendung von (5.2), (5.3) erhält man demnach für die Zeitableitung von A :

$$A' = A \cdot \left\{ \sin \theta \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \cos \theta \cdot I \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right\} \\ \cdot \left(-\theta' + \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \right) \quad (5.4)$$

beim nichtrelativistischen Problem bzw.

$$A' = A \cdot \left\{ \sin \theta \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} + \cos \theta \cdot I \times \frac{\mathbf{x}}{r} \right\} \\ \cdot \left(-\theta' + \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \sqrt{1-\beta^2} \right) \quad (5.5)$$

beim relativistischen Problem.

Wir zeigen jetzt, daß die rechtsstehende Klammer in (5.4), (5.5) verschwindet, so daß, wie behauptet, $A' = 0$ resultiert. Der springende Punkt ist, daß die Zeitableitungen der in Tab. 1 definierten Funktionen $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ die Eigenschaft haben:

$$\theta' = \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \theta' = \frac{L}{m} \frac{1}{r^2} \sqrt{1-\beta^2} \quad (5.6)$$

für das nichtrelativistische bzw. für das relativistische Problem.

Aus Tab. II.2 ist ersichtlich, daß (5.6) gerade die Differentialgleichungen zur Bestimmung des Winkels $\theta(r, r')$ sind. Wenn wir also das Formelsystem von Teil II benutzen, bedarf die Gültigkeit von (5.6) keines separaten Beweises. Wir wollen uns jedoch unabhängig machen von den in Teil II getroffenen speziellen Festlegungen (Normierungen, Einschränkungen usw.) über die Funktion $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ sowie von der Deutung der Größe θ als Polarkoordinate und fassen die Definition des Lenzschen Vektors $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ in Tab. 1 als Ansatz auf. Wir behaupten, aus diesem Ansatz folgen – unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung (1.1) bzw. (1.8) – die Gleichungen (5.6). Zum Beweis sind Fallunterscheidungen erforderlich.

Nichtrelativistisches Problem: Wir bilden die Zeitableitung von $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, siehe (T 1.5). Zunächst ist klar, daß die Zeitableitung des Vorzeichenfaktors $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \pm 1$, Gl. (T 1.3), verschwindet. Man erhält

$$\theta' = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - (L^2/r + \alpha m)^2}} L^2 \frac{1}{r^2} r'. \quad (5.7)$$

Für die Wurzel gilt

$$\sqrt{} = L m \cdot \sigma r',$$

als Folge aus der Bewegungsgl. (1.1), siehe Tab. II.1, (T 1.6). Also liefert (5.7)

$$\theta' = (L/m)/r^2,$$

wie behauptet.

Relativistischer Fall A: Aus (T 1.5) folgt

$$\theta' = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - (\{L^2 - (\alpha/c)^2\}/r + \alpha m \cdot \mathcal{E}/m c^2)^2}} \cdot L \sqrt{L^2 - (\alpha/c)^2} \cdot \frac{1}{r^2} r'. \quad (5.8)$$

Für die Wurzel im Nenner gilt:

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{L^2 - (\alpha/c)^2} m \sigma r' / \sqrt{1 - \beta^2},$$

als Folge aus der Bewegungsgl. (1.8), siehe Tab. II.1, (T 1.6). Also liefert (5.8)

$$\theta' = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot (L/m)/r^2,$$

wie behauptet.

Relativistischer Fall B: Aus (T 1.6) folgt

$$\theta' = \mp \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{m c^2}\right)^2 - 1 - 2 \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \frac{\alpha}{m c^2} \frac{1}{r}}} \cdot \frac{\alpha}{m c^2} \frac{1}{r^2} r'. \quad (5.9)$$

Für die Wurzel gilt

$$\sqrt{\quad} = (1/c) \sigma r' / \sqrt{1 - \beta^2},$$

als Folge aus der Bewegungsgl. (1.8), siehe Tab. II.1, Gl. (T 1.7). Also liefert (5.9)

$$\theta' = \mp \frac{\alpha}{m c} \frac{1}{r^2} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5.10)$$

Beim Fall B gilt $L = |\alpha|/c = \mp \alpha/c$. Es folgt

$$\theta' = \sqrt{1 - \beta^2} (L/m)/r^2,$$

wie behauptet.

Relativistischer Fall C: Aus (T 1.7) folgt

$$\theta' = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{(\{(\alpha/c)^2 - L^2\}/r - \alpha m \mathcal{E}/m c^2)^2 - A^2}} \cdot L \sqrt{(\alpha/c)^2 - L^2} \frac{1}{r^2} r'. \quad (5.11)$$

Für die Wurzel im Nenner gilt:

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{(\alpha/c)^2 - L^2} m \sigma r' / \sqrt{1 - \beta^2},$$

als Folge aus der Bewegungsgl. (1.8), siehe Tab. II.1, (T 1.8). Also liefert (5.11)

$$\theta' = \sqrt{1 - \beta^2} (L/m)/r^2,$$

wie behauptet.

6. Der relativistische Lenzsche Vektor bei der Rosettenbahn

Die Eigenschaft des in Tab.1 definierten Lenzschen Vektors A , eine Erhaltungsgröße zu sein, bedeutet, daß $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ zeitlich konstant ist, wenn eine vorgegebene Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ durchlaufen wird. Diese Aussage bedarf einer Präzisierung, wenn es sich um die Rosettenbahn handelt, die beim relativistischen Fall A im Energiebereich (1) für $\alpha < 0$ (Anziehung) auftritt, siehe Tabelle II.3. In Abb.1 ist eine derartige Rosettenbahn, die zwischen zwei Perihelen nur einen Umlauf um das Zentrum aufweist, dargestellt. Im allgemeinen gibt es zwischen zwei Perihelen endlich viele Umläufe um das Zentrum.

Der Wertebereich des in (T 1.5) auftretenden „Lenzschen Winkels“ θ ist per Definition beschränkt:

$$-\pi/\sqrt{1 - (\alpha/Lc)^2} \leq \theta \leq \pi/\sqrt{1 - (\alpha/Lc)^2}. \quad (6.1)$$

Das hat folgende Konsequenz: Nehmen wir an, wir starten im Bahnpunkt $\mathbf{x}(t)$ zur Zeit t , siehe Abbildung 1. Der zugehörige Lenzsche Vektor A ist in Abb.1 mit A_0 bezeichnet. Er zeigt zum Perihel P_0 (auf dem Kreis mit dem Radius r_{\min}). Kommt man zum Aphel A_1 (auf dem Kreis mit dem Radius r_{\max}), so befindet man sich an der oberen Grenze $\theta = \pi/\sqrt{1 - (\alpha/Lc)^2}$ des zulässigen Wertebereichs für den Lenzschen Winkel. Die untere Grenze $\theta = -\pi/\sqrt{1 - (\alpha/Lc)^2}$ liegt beim Aphel A_0 . Zu die-

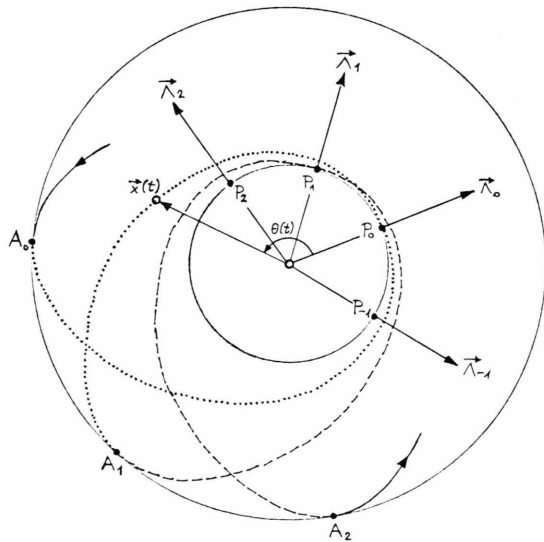


Abb. 1. Bahnabschnitte der Rosettenbahn mit dem jeweils zugehörigen Lenzschen Vektor A .

sem Bahnabschnitt $A_0 P_0 A_1$ (in Abb. 1 punktiert gezeichnet) gehört der zeitlich konstante Vektor A_0 .

Überschreitet man den Bahnpunkt A_1 , so springt der Lenzsche Winkel θ von $\pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}$ auf den Wert $-\pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}$. Zu dem anschließenden Bahnabschnitt $A_1 P_1 A_2$ (in Abb. 1 gestrichelt gezeichnet) gehört der Lenzsche Vektor A_1 , der zum Perihel P_1 zeigt. Das folgt aus den Definitionsgleichungen des relativistischen Vektors A in Tabelle 1. Die Wirkung des Lenzschen Winkels θ auf den Bahnvektor x wird in Abb. 2 veranschaulicht.

Wir haben also folgende Situation: Es gibt zu einer vorgegebenen Rosettenbahn $x(t)$ unendlich viele Lenzsche Vektoren A_n mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, deren Richtungen zu den Periheln P_n zeigen. Der Winkelabstand zwischen zwei benachbarten Vektoren (bzw. Perihelen) beträgt

$$\Delta\theta = 2\pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2}. \quad (6.2)$$

Sofern die Wurzel eine rationale Zahl (< 1) ist, gibt es nur endlich viele Vektoren (bzw. Perihelie), und es liegt eine geschlossene Rosettenbahn vor.

Innerhalb der Bahnabschnitte $A_n P_n A_{n+1}$ ist der zugehörige Vektor A_n zeitlich konstant. Im Falle der Rosettenbahn ist also der in Tab. 1 definierte relativistische Lenzsche Vektor A abschnittsweise zeitlich konstant, und er ist abschnittsweise eindeutig bestimmt.

Eine Ausnahme machen die Orte der Aphele A_n . Diesen Bahnpunkten sind jeweils zwei Vektoren A_{n-1} und A_n zugeordnet. Aber auch hier läßt sich Eindeutigkeit herstellen, indem man den zulässigen Wertebereich (6.1) des Lenzschen Winkels per Definition auf den Wertebereich

$$-\pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2} \leq \theta < \pi/\sqrt{1-(\alpha/Lc)^2} \quad (6.3)$$

begrenzt. Dann gehört zum Aphel A_n nur der eine Vektor A_n .

Im folgenden Abschn. 7 werden wir zeigen, daß – außer der Rosettenbahn – alle anderen Bahnkurven, sowohl die relativistischen als auch die nichtrelativistischen, einen Lenzschen Vektor A besitzen, der jeweils der gesamten Bahn zugeordnet ist (während der Vektor A bei der Rosettenbahn jeweils einem Bahnabschnitt eindeutig zugeordnet ist).

7. Der Lenzsche Vektor als Symmetrieachse der Bahnkurven

Um die geometrische Bedeutung des Lenzschen Vektors A zu untersuchen, müssen wir den Fall

$A = 0$ ausschließen. Das bedeutet den Ausschluß der trivialen Sonderfälle (1) „Kreisbahn“ (im Bereich $L \neq 0$, $\alpha < 0$) und (2) „freies Teilchen auf einer Zentralbahn oder in Ruhe“ ($L = 0$, $\alpha = 0$), vgl. Abschnitt 3. Wir können dann zum Lenzschen Einheitsvektor

$$\lambda = \cos \theta \cdot \frac{x}{r} - \sin \theta \cdot l \times \frac{x}{r} \quad (7.1)$$

übergehen und diesen diskutieren. Wir werden zeigen, daß der Vektor λ die Richtung der (orientierten) Symmetrieachse der jeweils vorgegebenen Bahnkurve $x(t)$ hat.

Für $L = 0$ (Zentralbahn) wurde λ bereits berechnet, siehe Fall (3), Gl. (3.4):

$$\lambda = \mp \frac{x}{r} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

gültig sowohl für das nichtrelativistische als auch für das relativistische Problem. Der Lenzsche Vektor fällt also mit der Bahngeraden, die man zugleich als Symmetrieachse der Bahnkurve auffassen kann, zusammen. Die Gln. (7.2) sind Grenzfälle (für $L \rightarrow 0$) von (7.4) für $\alpha < 0$ und (7.3) für $\alpha > 0$.

Für $L > 0$ werden die Symmetrieeigenschaften der Bahnkurven im Abschnitt II.6 diskutiert. Die Bahnkurven besitzen sämtlich eine Symmetrieachse. Diese (zu $\theta = 0$ gehörenden) Symmetrieachsen liegen alle auf ein und derselben Geraden. Sie stimmt mit der x_1^N -Achse der normierten Bahnebene K^N überein.

Die Untersuchungen im Abschnitt II.6 beziehen sich auf eine normierte Lage der Bahnkurven $x^N(t)$ in der Ebene K^N . Geht man von dem speziellen Koordinatensystem K^N zu einem allgemeinen Koordinatensystem K über, das (7.1) zugrunde liegt, so liegen die Symmetrieachsen der einzelnen Bahnkurven $x(t)$ keineswegs mehr alle auf ein und derselben Geraden. Um die Ergebnisse des Abschnitts II.6 anwenden zu können, machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß der durch (7.1) definierte Vektor λ für alle Punkte einer Bahn $x(t)$ und für die zugehörigen Winkel $\theta(t)$ zeitlich konstant ist. Zur Berechnung von λ genügt es also, einen beliebigen (passend gewählten) Bahnpunkt x und den zugehörigen Winkel θ in (7.1) einzusetzen.

Wir beginnen mit dem nichtrelativistischen Problem und dem relativistischen Fall A. Sämtliche Bahnkurven (Tab. II.3) besitzen ein Perihel $r = r_{\min}$ bei $\theta = 0$. Der gleiche Zusammenhang zwischen die-

sen speziellen Werten r und θ folgt auch aus den Gln. (T 1.5), die dem Lenzschen Vektor λ zugrunde liegen. Demnach liefert (7.1) die Darstellung

$$\lambda = \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)_{r=r_{\min}}. \quad (7.3)$$

Der Lenzsche Vektor zeigt also in Richtung der Symmetrieachse zum Perihel dieser Bahnkurven. Eine Ausnahme bildet der Grenzfall „Kreisbahn“, für den kein ausgezeichnetes Perihel existiert. In diesem Falle wird die Richtung λ unbestimmt, weil der Winkel θ unbestimmt wird (denn es gibt in diesem Fall unendlich viele Symmetrieachsen).

Bei der Rosettenbahn, die unendlich viele (oder im Sonderfall endlich viele) diskrete Perihele – und unendlich viele (bzw. endlich viele) diskrete Symmetrieachsen – besitzt, zeigt der relativistische Vektor (7.3) in die Richtung dieser Symmetrieachsen. Berechnet man den Lenzschen Vektor λ aufgrund von Anfangswerten \mathbf{x}^a , \mathbf{x}'^a zur Zeit t^a und beschränkt man sich auf den zugehörigen Bahnabschnitt $\mathbf{x}(t)$, vgl. Abb. 1, so weist λ in die Richtung des dem Bahnpunkt \mathbf{x}^a benachbarten Perihels. In diesem Falle gibt es nur einen Wert λ und nur eine zugehörige Symmetrieachse.

Es bleiben noch die relativistischen Fälle B und C (Tab. II.4). Für den Fall $\alpha > 0$ (Abstoßung) besitzt die hyperbelähnliche Bahnkurve ebenfalls ein Perihel $r = r_{\min}$ bei $\theta = 0$, und es gilt wieder die Beziehung (7.3). Für den Fall $\alpha < 0$ (Anziehung) sind drei Energiebereiche zu unterscheiden. Im Energiebereich (1) besitzt die geschlossene Spirale (finite Bahnkurve) ein Aphel $r = r_{\max}$ bei $\theta = \sigma\pi = \pm\pi$. Es folgt aus (7.1)

$$\lambda = -(\mathbf{x}/r)_{r=r_{\max}}. \quad (7.4)$$

Der Lenzsche Vektor zeigt also in die zum Aphel entgegengesetzte Richtung, welche auf der Symmetrieachse der Spirale liegt.

Die zu den Energiebereichen (2) und (3) gehörenden infiniten Bahnkurven bestehen (bei vorgegebenen Werten für L und \mathcal{E}) jeweils aus einem Paar getrennter Spiralen: einer einlaufenden Spirale (vom Unendlichen ins Zentrum) und einer auslaufenden Spirale (vom Zentrum ins Unendliche). Die vorgegebenen Anfangswerte \mathbf{x}^a , \mathbf{x}'^a legen fest, welche der beiden Spiralen als Bahnkurve in Frage kommt. Die einzelne Spirale besitzt keine Symmetrieachse. Man kann aber, wie in Abschn. II.8 gezeigt wird, das Spiralenpaar auch als eine einzige offene Doppelspirale

interpretieren, und dies ist die sinnvolle Interpretation der Bahnkurve.

Um für diese Doppelspirale, die eine Symmetrieachse, aber weder ein Perihel noch ein Aphel besitzt, den zugehörigen Vektor λ gemäß (7.1) berechnen zu können, liegt es nahe, als speziellen Bahnpunkt einmal den unendlich fernen Bahnpunkt $(\mathbf{x})_{r \rightarrow \infty}^e$ (für den einlaufenden Spiralast) und zum anderen den unendlich fernen Bahnpunkt $(\mathbf{x})_{r \rightarrow \infty}^a$ (für den auslaufenden Spiralast) zu nehmen. Für den einlaufenden Spiralast gilt zwischen r und θ die Zuordnung $r \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow \theta^*$ und für den auslaufenden Spiralast die Zuordnung $r \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow -\theta^*$. Der Grenzwinkel θ^* folgt aus (T.1.6) und (T.1.7). Er ist in Tab. II.4 explizit als Funktion der Parameter α , L , \mathcal{E} angegeben. Diese Funktion wird hier aber nicht benötigt.

Damit ergeben sich für den Vektor λ gemäß (7.1) zunächst zwei Darstellungen:

$$\lambda = -\{\cos \theta^* \cdot \mathbf{n}^e - \sin \theta^* \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}^e\}, \quad (7.5)$$

$$\lambda = -\{\cos \theta^* \cdot \mathbf{n}^a + \sin \theta^* \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n}^a\} \quad (7.6)$$

mit den Einheitsvektoren $\mathbf{n}^e = (\mathbf{x}/r)_{r \rightarrow \infty}^e$ und $\mathbf{n}^a = (\mathbf{x}/r)_{r \rightarrow \infty}^a$. Das negative Vorzeichen vor der Klammer in (7.5), (7.6) rührt von dem $\sigma \cdot \pi$ -Term her, der in (T.1.6), (T.1.7) für $\alpha < 0$ auftritt. Die halbe Summe liefert

$$\lambda = -\frac{1}{2} \{ \cos \theta^* \cdot (\mathbf{n}^e + \mathbf{n}^a) - \sin \theta^* \cdot \mathbf{l} \times (\mathbf{n}^e - \mathbf{n}^a) \}. \quad (7.7)$$

Das rechtsstehende Vektorprodukt läßt sich umformen

$$\mathbf{l} \times (\mathbf{n}^e - \mathbf{n}^a) = -\tan \theta^* \cdot (\mathbf{n}^e + \mathbf{n}^a) \quad (7.8)$$

und man erhält $\lambda = -(\mathbf{n}^e + \mathbf{n}^a)/2 \cos \theta^*$. Der Nenner ist der Betrag von $\mathbf{n}^e + \mathbf{n}^a$, so daß man endgültig den Ausdruck

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)_{r \rightarrow \infty}^e + \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)_{r \rightarrow \infty}^a}{\left| \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)_{r \rightarrow \infty}^e + \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \right)_{r \rightarrow \infty}^a \right|} \quad (7.9)$$

bekommt. Dies ist der Lenzsche Vektor für die infinite Doppelspirale der relativistischen Fälle B und C.

Wir müssen noch zeigen, daß dieser Vektor λ mit der (orientierten) Symmetrieachse der Doppelspirale zusammenfällt. Die Doppelspirale im Energiebereich (3), Tab. II.4, besitzt zwei Asymptoten. Deren Richtungsvektoren sind \mathbf{n}^e und \mathbf{n}^a . Demnach ist

der Vektor $\mathbf{n}^e + \mathbf{n}^a$ die gerichtete Winkelhalbierende dieser Asymptoten. Die Winkelhalbierende ist aber gerade die Symmetrieachse der Doppelspirale. Der Vektor λ zeigt also gemäß (7.9) in eine Richtung der Symmetrieachse, die der Richtung, für die $r \rightarrow \infty$ gilt, entgegengesetzt ist.

Für die Doppelspirale im Energiebereich (2), die keine Asymptoten besitzt, wird der Grenzwinkel $\theta^* = 0$ und es folgt $(\mathbf{x}/r)_{r \rightarrow \infty}^e = (\mathbf{x}/r)_{r \rightarrow \infty}^a$. Damit vereinfacht sich die Gl. (7.9):

$$\lambda = -\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right)_{r \rightarrow \infty}^e = -\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right)_{r \rightarrow \infty}^a. \quad (7.10)$$

Der Vektor λ liegt also – als Spezialfall von (7.9) – ebenfalls auf der Symmetrieachse der Doppelspirale.

Damit sind alle Fälle erschöpft. Zusammenfassend kann man sagen: Die Bedeutung des Lenzschen Vektors λ – sowohl des nichtrelativistischen als auch des relativistischen Vektors – liegt darin, daß er, für $\lambda \neq 0$, die Richtung der orientierten Symmetrieachse der Bahnkurven $\mathbf{x}(t)$ angibt.

8. Der Lenzsche Winkel

Wir schreiben den Lenzschen Einheitsvektor, Gl. (7.1), in der Form

$$\lambda = \cos \theta \cdot \mathbf{n} - \sin \theta \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{n} \quad (8.1)$$

mit den Einheitsvektoren $\lambda = \lambda/\lambda$, $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$ und $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$. Für das Folgende setzen wir $\lambda \neq 0$, $L \neq 0$ voraus. Das heißt, wir schließen die im Abschn. 3 behandelten trivialen Fälle (1), (2), (3) (Kreisbahn und Zentralbahn) aus.

Der Winkel $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ist die einzige individuelle Größe, die der Lenzsche Vektor $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ enthält. Somit ist es gerechtfertigt, θ als „Lenzschen Winkel“ zu bezeichnen. Die Gl. (8.1) bedeutet eine Drehung des Vektors \mathbf{n} mit dem Winkel $-\theta$ um die Achse \mathbf{l} oder, anders ausgedrückt, eine Drehung mit dem Winkel θ im negativen Drehsinn um die Achse \mathbf{l} . Der Winkel θ selber kann positiv, negativ oder Null sein. Bei der Drehung geht der Vektor \mathbf{n} in den Vektor λ über. Die Abb. 2, in der eine Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ mit dem Perihel P gezeichnet ist, veranschaulicht das.

Damit haben wir bereits eine koordinatenunabhängige Deutung des Lenzschen Winkels θ als Drehwinkel gefunden. Eine andere, koordinatenabhängige Interpretation des Winkels θ wird im Abschnitt II.2 gegeben. Dort ist θ der normierte Polarwinkel des Bahnvektors \mathbf{x}^N in einem speziellen Koordinatensystem K^N . Wir kommen auf die unterschiedlichen Interpretationen des Winkels θ noch zurück.

Wir diskutieren jetzt das Anfangswertproblem der Dgl. (1.1) bzw. (1.8) – für den nichtrelativistischen bzw. für den relativistischen Fall – und inter-

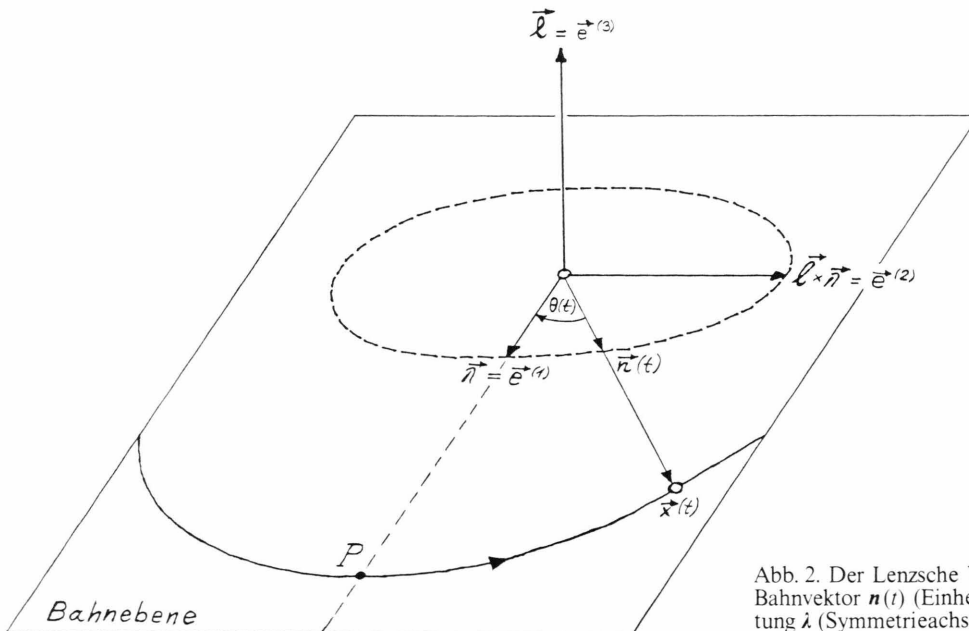


Abb. 2. Der Lenzsche Winkel $\theta(t)$ dreht den Bahnvektor $\mathbf{n}(t)$ (Einheitsvektor) in die Richtung λ (Symmetrieachse der Bahnkurve).

essieren uns insbesondere für die Rolle, die der Lenzsche Vektor λ und der Lenzsche Winkel θ dabei spielen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung enthält 6 freie Integrationskonstanten. Diese seien durch die 6 Anfangsbedingungen \mathbf{x}^a , \mathbf{x}'^a zur Zeit t^a festgelegt. Es stehen 5 unabhängige Erhaltungsgrößen zur Verfügung, die durch die Anfangsbedingungen fixiert werden: die Energie E bzw. \mathcal{E} , der Betrag des Drehimpulses L und die beiden, aufeinander senkrechtstehenden Einheitsvektoren λ und I (3 unabhängige Größen). Die sechste freie Konstante kann z.B. dazu benutzt werden, um den Nullpunkt auf der Skala des Parameters t festzulegen, etwa $t = 0$ im Perihel.

Die beiden Konstanten E bzw. \mathcal{E} und L legen den Bahntyp fest. Sie werden in den Tab. II.3 und II.4 zur Klassifizierung der Lösungen verwendet. Die drei durch λ , I gegebenen Konstanten legen die Lage und Orientierung der Bahn $\mathbf{x}(t)$ fest, nämlich einmal die Bahnebene (senkrecht auf I) einschließlich Umlaufsinn der Bahn, zum anderen die Symmetrieachse der Bahn (parallel zu λ) einschließlich Orientierung der Achse.

Wenn es sich bei dem Bahntyp um die Rosette handelt, sei der Vektor λ , wie in Abschnitt 7 erläutert, die zum Bahnpunkt \mathbf{x}^a benachbarte Symmetrieachse.

Aus den Vektoren λ , I läßt sich ein Dreibein $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ konstruieren (Abb. 2), das zeitlich konstant ist:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \lambda, \quad \mathbf{e}^{(2)} = I \times \lambda, \quad \mathbf{e}^{(3)} = I. \quad (8.2)$$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Anfangswertproblems läßt sich besonders einfach formulieren, wenn man den Vektor \mathbf{x} nach den Dreibeinvektoren entwickelt. Zu dem Zweck lösen wir (8.1) nach \mathbf{n} auf:

$$\mathbf{n} = \cos \theta \cdot \lambda + \sin \theta \cdot I \times \lambda. \quad (8.3)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Vektor λ mit dem Winkel θ um die Achse I gedreht wird. Dabei geht der Vektor λ in den Vektor \mathbf{n} über. Die gewünschte Entwicklung von $\mathbf{x}(t)$ erhält man, wenn man (8.3) mit r multipliziert:

$$\mathbf{x}(t) = r(t) \cdot \{\cos \theta(t) \cdot \lambda + \sin \theta(t) \cdot I \times \lambda\}. \quad (8.4)$$

Man kann ein neues Koordinatensystem K^N einführen, indem man das Dreibein (8.2) als Koordinatendreibein nimmt. Das bedeutet den Übergang von

dem bisher benutzten Koordinatensystem K , in dem der Bahnvektor die Form $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ hat, zu dem neuen Koordinatensystem K^N mit dem Bahnvektor $\mathbf{x}^N = (x_1^N, x_2^N, 0)$. Der Übergang $K \rightarrow K^N$ bedeutet eine gewöhnliche Koordinatentransformation (Drehung des Koordinatensystems). Demnach erhält man aus der Vektorgleichung (8.4) im System K die entsprechende Vektorgleichung im System K^N , indem man an den Vektoren in (8.4) den Index N anbringt:

$$\mathbf{x}^N(t) = r(t) \cdot \{\cos \theta(t) \cdot \lambda^N + \sin \theta(t) \cdot I^N \times \lambda^N\}. \quad (8.5)$$

Im System K^N haben die Basisvektoren (8.2) die Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)N} &= \lambda^N = (1, 0, 0), \\ \mathbf{e}^{(2)N} &= I^N \times \lambda^N = (0, 1, 0), \\ \mathbf{e}^{(3)N} &= I^N = (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (8.6)$$

und aus (8.5) folgt

$$\mathbf{x}^N(t) = r(t) \cdot (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0). \quad (8.7)$$

Im System K^N sind also r, θ die Polarkoordinaten des Vektors \mathbf{x}^N in der Bahnebene. Der Lenzsche Drehwinkel θ erscheint jetzt als Polarwinkel.

Damit ist geklärt, welche Rolle der Lenzsche Vektor λ beim Anfangswertproblem spielt. Die Situation läßt sich folgendermaßen charakterisieren. Zu einem vorgegebenen Satz von 6 Anfangswerten \mathbf{x}^a , \mathbf{x}'^a gehört das zugehörige Dreibein (8.2). Die Bahnebene ist durch $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ bestimmt, die Symmetrieachse der Bahnkurve durch $\mathbf{e}^{(1)}$. Geht man zu einem anderen Satz von Anfangswerten über, so erhält man im allgemeinen ein anderes, gedrehtes Dreibein. Die Bahn läuft in einer anderen Ebene, und ihre Symmetrieachse hat eine andere Richtung. Wir wechseln jetzt die Betrachtungsweise.

Um das Lösungssystem der Dgl. (1.1) bzw. (1.8) aufzustellen, kann man – anders als beim Anfangswertproblem – in folgender Weise vorgehen. Wir suchen die Gesamtheit der Lösungen $\mathbf{x}(t)$ bei vorgegebenen Vektoren I und λ . Als Koordinatensystem benutzen wir das durch das Koordinatendreibein (8.6) definierte System K^N . In diesem System ist der Bahnvektor \mathbf{x}^N durch (8.7) gegeben. Sämtliche Bahnkurven $\mathbf{x}^N(r, \theta)$ liegen jetzt in der durch die Vektoren λ^N und $I^N \times \lambda^N$ aufgespannten Ebene. Das Wesentliche ist, die Bahnkurven liegen alle in einer normierten Lage: ihre (orientierten) Symmetrieachsen, die durch den Lenzschen Einheitsvektor

$\lambda^N = (1, 0, 0)$ gegeben sind, fallen alle mit der Achse 1 des Koordinatensystems K^N zusammen.

Bei dieser Betrachtungsweise ist es gerechtfertigt, das Koordinatensystem K^N als normiertes Koordi-

natensystem und den Winkel θ als normierten Polarkwinkel zu bezeichnen. Das beschriebene Lösungsverfahren liegt dem Formelsystem des Teils II zugrunde.

- [1] L. D. Landau u. E. M. Lifschitz, Lehrbuch d. Theor. Physik, Bd. 1, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
- [2] P. Mittelstaedt, Klassische Mechanik, Bibliogr. Institut, Mannheim 1970.
- [3] M. I. Petraschen u. E. D. Trifonow, Anwendung der Gruppentheorie in der Quantenmechanik, Akademie-Verlag, Berlin 1969.
- [4] H. Mitter, Quantentheorie, Bibliogr. Institut, Mannheim 1979.
- [5] W. Greiner, Theoretische Physik, Bd. 5, Verlag Harri Deutsch, Thun u. Frankfurt (Main) 1979.
- [6] D. M. Fradkin, Progr. Theor. Phys. **37**, 798 (1967).